Übungen zur FP-Einführungsvorlesung

Statistische Methoden

Blockkurs, Februar/März 2012

Prof. Dr. K. Jakobs, Dr. C. Weiser

Aufgabenblatt 1

Dienstag 28. Februar (oder Mittwoch, 29. Februar) 2012

1. **Mittelwert, Varianz und Kovarianz**

   (a) Zeigen Sie, dass

   - die Summe der linearen Abweichungen einer Menge von Zahlen X_i von ihrem arithmetischen Mittelwert gleich null ist.
   - die Summe der Quadrate der Abweichungen einer Menge von Zahlen X_i von einer beliebigen Zahl A nur dann minimal ist, wenn $A = \bar{X}$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass für die Berechnung der Varianz bzw. Kovarianz gilt:

   - $\sigma^2(x) := E\{(x-\mu)^2\} = E(x^2) - (E(x))^2$
   - $\mathrm{cov}(x,y) := E\{(x-\mu_x)\,(y-\mu_y)\} = E(xy) - \mu_x\,\mu_y$

   wobei μ, μ_x und μ_y die entsprechenden Erwartungswerte sind.

2. **Wahrscheinlichkeitsdichte**

   Gegeben sei eine Zufallsvariable x mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

   $$\begin{array}{lll} f(x) = b & \text{für} & -a \le x < 0 \\ f(x) = c & \text{für} & 0 \le x < a \\ f(x) = 0 & \text{sonst} & \end{array}$$

   Bestimmen Sie c als Funktion von a und b, sowie den Erwartungswert $E(x)$, den Median $x_{0.5}$ und die Varianz $\sigma^2(x)$ der Verteilung.

3. **Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte und Randverteilungen**

   Gegeben sei die folgende zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte:

   $$\begin{array}{lll} f(x,y) = x + y & \text{für} & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ f(x,y) = 0 & \text{sonst} & \end{array}$$

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x im Intervall zwischen 0.5 und 1 und gleichzeitig y im Intervall zwischen 0.4 und 0.6 liegt?

   (b) Wie lauten die Randverteilungen der Zufallsvariablen x und y?

4. **Korrelationskoeffizient**
   Gegeben sei eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x, y)$. Zeigen Sie, dass

   (a) der Korrelationskoeffizient $\rho(x, y)$ gleich null ist, wenn x und y unabhängige Zufallsvariablen sind.

   (b) der Korrelationskoeffizient $\rho(x, y)$ betragsmäßig kleiner als 1 ist.

   (c) $|\rho(x, y)| = 1$ genau dann gilt, wenn ein linearer Zusammenhang zwischen x und y besteht.

   Hinweis zu (b) und (c): führen Sie reduzierte Variablen $u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$, $v = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$ ein und betrachten Sie die Varianz der Summe bzw. der Differenz von u und v.